



Universidad
Carlos III de Madrid

Matemática Discreta

Examen Final Mayo 2013

| | | | |
|-----------|--|-----------------|--|
| Apellidos | | Grupo | |
| Nombre | | Hora de entrega | |

Reglas generales:

- No se permite el uso de ningún dispositivo electrónico.
- Cada afirmación debe ser justificada.
- Se puede abandonar el aula a los 20m de comenzar el examen.
- Este examen corresponde a CINCO puntos en la evaluación continua.

Problema 1 (2 puntos)

- a) Calcular la función generatriz que codifica el siguiente problema: calcular el número de soluciones enteras y distintas de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = N,$$

dónde los x_i son naturales impares y N es un natural arbitrario. **Nota:** el resultado final debe ser una función, no una serie infinita de potencias.

- b) Calcular el número de soluciones naturales distintas de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 501,$$

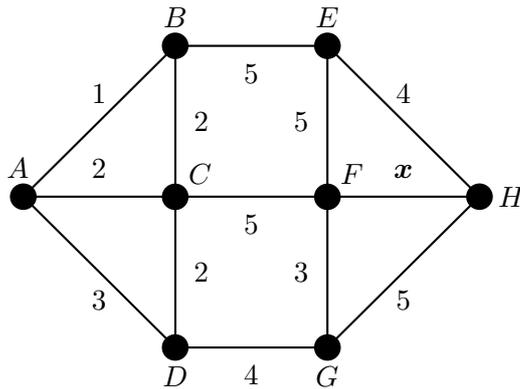
dónde los x_i son naturales impares. **Nota:** en el resultado final se aceptan sólo factoriales $p!$ o coeficientes binomiales $\binom{n}{k}$ con $n, k \geq 0$.

- c) Demostrar por inducción que

$$n^3 \geq n^2 - 3n + 1, \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Problema 2 (1.5 puntos)

- Demostrar que el grafo bipartito completo $K_{100,200}$ no es planar. ¿Es $K_{100,200}$ hamiltoniano?
- Sea $G = (V, E, \omega)$ el siguiente grafo ponderado (con el peso de la arista $\{F, H\}$ igual a $x \in \mathbb{R}$):



Calcular el intervalo con los valores posibles del peso $x \in \mathbb{R}$ para que el camino de longitud mínima que parte de A y llega a H pase por la arista $\{F, H\}$. **Nota:** es necesario usar técnicas de teoría de grafos.

Problema 3 (1.5 puntos) Sea $G = (V, E)$ un grafo cuya matriz de adyacencia A_G está dada por

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Contestar a las siguientes preguntas usando argumentos basados únicamente en la matriz A_G (y sin usar la representación gráfica de G que se puede obtener de A_G):

- Decir si G es un pseudo-grafo, multi-grafo o un grafo simple.
- Decir el número de vértices y aristas de G .
- ¿Es G un grafo regular? Si lo es, decir el grado común de todos los vértices; en caso contrario, dar la secuencia de grados de G .
- Sean $i \neq j$ dos vértices distintos de G ($i, j \in V$). Sea n_{ij} el número de caminos de i a j de longitud 3. Encontrar los posibles valores de n_{ij} en G .
- ¿Cuál es el ciclo de menor longitud en G ?